**B题 降雨系统和灰水系统的运作和设计**

水资源短缺已经成为许多国家面临的最重要的问题之一。本项目要求你模拟降雨系统和灰水系统的运作，然后使用模拟决定可以达到某种程度的节约用水的最有效方式。这个系统包含一个收集房顶的雨水的降雨箱和一个收集淋浴和洗涤机器的污水的灰水箱。雨水和灰水可以用来冲厕所或者灌溉花园（假设花园可以使用洗涤剂）。

这里将基于一天进行模拟：每天模拟收集到的雨水和灰水的数量，然后模拟厕所和花园的用水量。对花园首先使用雨水，然后再使用灰水，冲厕所正好相反。如果没有足够的储存水用来冲厕所或者灌溉花园，那么将使用生活用水。

表1 给出了某城市从1908到2011年的基于月份的降雨量数据。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 月份 | 平均降雨量 | 10%分位数 | 50%分位数 | 90%分位数 | 平均下雨天数 |
| 一月 | 47.6 | 10.9 | 36.9 | 99.2 | 8.4 |
| 二月 | 48 | 6.8 | 32.6 | 108.5 | 7.5 |
| 三月 | 50.4 | 11.8 | 38.8 | 104.9 | 9.4 |
| 四月 | 57.3 | 17.7 | 49.8 | 114.4 | 11.8 |
| 五月 | 55.8 | 21.3 | 55.1 | 91.2 | 14.6 |
| 六月 | 49 | 25.1 | 42.6 | 85.3 | 15.4 |
| 七月 | 47.5 | 23.3 | 44.4 | 72.1 | 16.1 |
| 八月 | 50 | 23.5 | 49.2 | 77.7 | 16.1 |
| 九月 | 58.1 | 27.8 | 53 | 92.4 | 14.9 |
| 十月 | 66.4 | 25.4 | 67 | 111.3 | 14.2 |
| 十一月 | 60.4 | 21.5 | 53.8 | 114.7 | 11.8 |
| 十二月 | 59.5 | 17.6 | 52.3 | 110.3 | 10.4 |

假设每天的降雨量是相互独立的，令表示第月（）第天的降雨量，然后假设



其中，Bernoulli()表示参数为的两点分布，是参数为和的伽玛分布，分布密度为

上面给出了每天降雨量的模型，我们也需要每月降雨量的模型。令表示第个月的天数，那么第个月的降雨量是



则有



令，这里binom指二项分布。然后使用全概率公式，可以得到对于有



其中。可以使用下面的事实：独立的服从和分布的随机变量的和服从分布，即伽玛分布关于形状参数具有可加性。

**任务1**

这里需要估计的参数。使用如下方法。这里（包括以后）假设二月总是有28天。

平均下雨天恰好是的样本均值。使用它们估计的值。

使用和平均降雨量可以得到与有关的的一个表达式（这里已经估计了）。

为了估计，我们使用观测到的分位数。令是的理论分布函数，可以从第个月的降雨量求得。分位数是样本点的百分之分位数。也即是



显然正好是中位值。

通过最小化下面的损失函数来拟合



基于上述知识，请估计三月降雨量分布中三个参数和的值并精确到两位有效数字。作为参考，对于第一个月，和的估计应该是0.27，0.24和0.043。

**任务2**

假设该城市一月至十二月的平均最大温度分别是：25.9, 25.8, 23.9, 20.3, 16.7, 14.1,13.5, 15.0, 17.2, 19.7, 22.0, 24.2，屋顶的面积为100平方米，花园的面积为200平方米，一个四口之家每天冲洗厕所的次数是随机的，服从binom(15,0.8)分布，每次冲洗厕所需要5升水，每天沐浴的次数是4次，每次用水35升，洗衣房洗衣的次数是随机变量，服从binom(8，0.125)分布，每次洗衣用水35升。请基于以下原则模拟一个四口之家的一个降雨箱和灰水箱的运作。

对于该模拟，时间增量以一天为单位，给出一年的时间长度。每天的模拟状态更新如下：

1. 模拟日降雨量（单位：毫米）。降雨箱收集的雨水容量（以升为单位）等于屋顶的面积（以平方米为单位）乘以降雨的深度。
2. 模拟日灰水量（单位：升）。灰水箱收集的水容量等于沐浴器的使用次数乘以每次沐浴的用水量加上洗衣房洗衣的次数乘以每次洗衣物的用水量。
3. 用来冲洗厕所的水等于冲洗的次数乘以每次冲洗器的用水量。该水首先取自灰水箱，然后取自雨水箱，然后取自生活用水。记录下节约的水量，也即是冲洗厕所时来自于箱子里的水而不是生活用水。
4. 花园的用水量计算如下。在第个月里希望持续三天花园里水的平均深度至少是当月平均最大温度除以15（以毫米为单位），（因此在1月份的任意一个连续三天的周期内，花园里平均至少有毫米的水。）前两天花园里水的深度必须包含雨水和灌溉水。用水量（以升为单位）是水的深度乘以花园的面积（以平方米为单位）。该水首先取自雨水箱，然后来自灰水箱，最后来自生活用水。

基于以上描述，请估计每年平均节约的用水量。你能否设计另外一种方法用来估计每年节约的用水量。

**任务3**

现在使用上面建立的模拟帮助选择安装哪种系统。

假设箱子的容量有1000,2000,3000,5000和10,000升，每1000升容量花费1000元。假设铺设管道（不计管道长度）的费用是1万元，如果每安装一个雨水箱则增加2千元，每安装一个灰水箱则增加5千元。

请分别给出（平均）每年节约50,000升和60,000升费用最少的方法。